

VERIFICHE DI STABILITA' ASTE COMPRESSE

CNR 10011/85 §7

Secondo la normativa italiana (CNR 10011 e D.M. 6/1/1996) deve essere:

$$\frac{\sigma_c}{\sigma} \geq \nu \quad (1)$$

dove:

$\sigma_c = N_c/A$ è la tensione corrispondente alla forza N_c che provoca l'inflessione laterale dell'asta nel piano che si considera;

$\sigma = N/A$ è la tensione assiale di compressione media

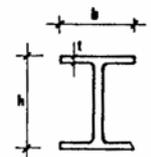
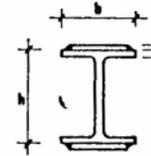
$\nu = 1.5$ è il coefficiente di sicurezza

I valori di σ_c sono tabulati nel prospetto 7-I in funzione del rapporto $\lambda/\bar{\lambda}_y$ dove:

$$\bar{\lambda}_y = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad \text{è la snellezza al limite elastico.}$$

E' presentata anche una formulazione analitica che approssima i valori tabulati.

Prospetto 7-I — Valori σ_c/f_y

$\lambda/\bar{\lambda}_y$	σ_c/f_y				Aste	Forma della sezione	Curva	
	curva a	curva b	curva c	curva d				
0.00	1.000	1.000	1.000	1.000	semplici	profili cavi quadri, rettangoli o tondi saldati o laminati $t \leq 40$ mm	a	
0.10	1.000	1.000	1.000	1.000				
0.20	1.000	1.000	1.000	1.000				
0.30	.978	.965	.951	.917				
0.40	.953	.925	.900	.841				
0.50	.923	.885	.843	.769				
0.60	.885	.838	.783	.699				
0.70	.844	.785	.719	.633				
0.80	.796	.727	.655	.572				
0.90	.739	.663	.593	.517				
1.00	.674	.599	.537	.468				
1.10	.606	.538	.486	.424				
1.20	.540	.481	.439	.385				
1.30	.480	.429	.395	.350				
1.40	.427	.383	.357	.319				
1.50	.381	.343	.323	.290				
1.60	.341	.308	.293	.265				
1.70	.306	.277	.266	.242				
1.80	.277	.250	.241	.222				
1.90	.251	.226	.219	.204				
2.00	.228	.205	.200	.188				
2.10	.208	.188	.183	.173				
2.20	.190	.173	.169	.160				
2.30	.175	.159	.158	.148				
2.40	.162	.147	.147	.138				
2.50	.149	.137	.137	.129				
2.60	.138	.128	.128	.120				
2.70	.128	.119	.119	.112				
2.80	.119	.110	.110	.105				
2.90	.112	.103	.103	.098				
3.00	.105	.096	.096	.092				
					semplici	I laminati $\frac{h}{b} \geq 1,2$ $t \leq 40$ 	b	
								I laminati rinforzati con piatti saldati $t_1 \leq 40$ $t_2 \leq 40$ 
					Semplici o composte	generica	$t \leq 40$ mm	c
						tutte	$t > 40$ mm	d

RESISTENZA DELLE MEMBRATURE ALL'INSTABILITA' [EC3 #5.5]

5.5.1 Membrature compresse

5.5.1.1 Resistenza all'instabilità

(1) La resistenza di progetto all'instabilità di una membratura compressa va assunta pari a:

$$N_{b,Rd} = \chi(\beta_A A) f_y / \gamma_{M1} \quad (b = \text{buckling})$$

$$\text{con: } \beta_A = A_{eff} / A \quad (=1 \text{ per sezioni di classe 1,2,3})$$

$$\gamma_{M1} = 1.1 \quad (=1.05 \text{ secondo DAN D.M.1996})$$

Invece di amplificare le sollecitazioni col coefficiente ω , come la normativa italiana, l'Eurocodice applica il coefficiente riduttivo della resistenza χ . In pratica si ha $\chi = 1/\omega$.

Il coefficiente χ è tabulato (prospetto 5.5.2) in funzione della snellezza adimensionale:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \sqrt{\beta_A} = \sqrt{\frac{N_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{\beta_A f_y}{\sigma_{cr}}}$$

Si ha infatti:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\beta_A f_y}{\sigma_{cr}}} = \sqrt{\beta_A} \sqrt{\frac{f_y}{\pi^2 E / \lambda^2}} = \sqrt{\beta_A} \frac{\lambda}{\pi \sqrt{E / f_y}} = \sqrt{\beta_A} \frac{\lambda}{\lambda_1}$$

$$\lambda = \ell / i \quad \ell = \text{lunghezza di libera inflessione} \quad i = \text{raggio giratorio} = \sqrt{I / A}$$

$$\lambda_1 = \text{snellezza al limite elastico}$$

Se come riferimento si assume la snellezza al limite elastico per l'acciaio Fe360 (S 235) che vale 93.9 si può scrivere:

$$\lambda_1 = 93.9 \varepsilon \quad \text{con} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

I valori del coefficiente χ possono anche essere ricavati analiticamente in base al coefficiente di imperfezione α :

Prospetto 5.5.2 – Coefficienti di imperfezione

Curva di instabilità	a	b	c	d
Coefficienti di imperfezione α	0,21	0,34	0,49	0,76

5.5.1.2. Membrature a sezione costante

- (1) Nel caso di compressione assiale uniforme in membrature a sezione trasversale costante, il valore di χ per la snellezza adimensionale pertinente $\bar{\lambda}$ può essere determinato con l'equazione:

$$\chi = \frac{1}{\phi + [\phi^2 - \bar{\lambda}^2]^{0,5}} \quad \text{con la limitazione } \chi \leq 1 \quad [5.46]$$

dove: $\phi = 0,5 [1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2];$

α è un coefficiente di imperfezione;

$$\bar{\lambda} = [\beta_A A f_y / N_{cr}]^{0,5} = (\lambda / \lambda_1) [\beta_A]^{0,5};$$

λ è la snellezza per la modalità di instabilità pertinente;

$$\lambda_1 = \pi [E / f_y]^{0,5} = 93,9 \varepsilon;$$

$$\varepsilon = [235 / f_y]^{0,5} \quad (f_y \text{ in N/mm}^2);$$

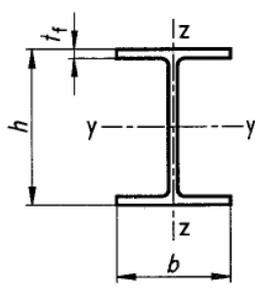
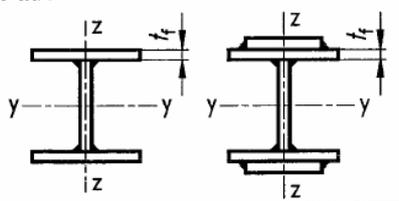
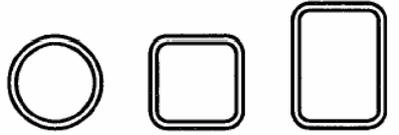
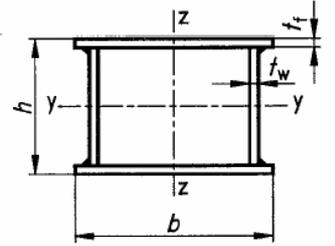
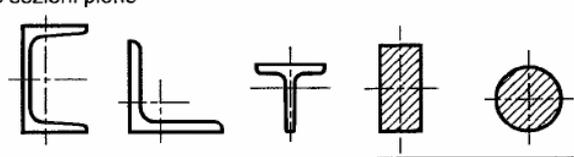
N_{cr} è la forza elastica critica per la modalità di instabilità pertinente.

- (3) I valori del coefficiente di riduzione χ per le varie snellezze adimensionali $\bar{\lambda}$ possono essere ottenuti dal prospetto 5.5.2.
- (4) In alternativa, le membrature a sezione costante possono essere verificate usando l'analisi del secondo ordine: vedere 5.5.1.3(4) e (6).

5.5.1.3. Membrature a sezione variabile

- (1) Le membrature rastremate e le membrature con variazioni della sezione trasversale nella loro lunghezza possono essere analizzate usando una analisi del secondo ordine: vedere (4) e (6).
- (2) In alternativa, metodi semplificati di analisi possono essere basati su modifiche alla procedura fondamentale per le membrature a sezione costante.

Prospetto 5.5.3 - Selezione della curva di instabilità per una sezione trasversale

Sezione trasversale	Limiti	Instabilità attorno all'asse	Curva di instabilità
Sezioni laminate ad I 	$h/b > 1,2$ $t_f \leq 40 \text{ mm}$ $40 \text{ mm} < t_f \leq 100 \text{ mm}$	y-y z-z y-y z-z	a b b c
	$h/b \leq 1,2$ $t_f \leq 100 \text{ mm}$ $t_f > 100 \text{ mm}$	y-y z-z y-y z-z	b c d d
Sezioni saldate ad I 	$t_f \leq 40 \text{ mm}$ $t_f > 40 \text{ mm}$	y-y z-z y-y z-z	b c c d
Sezioni cave 	lamine a caldo	tutti	a
	profilate a freddo - uso di f_{yb} *)	tutti	b
	profilate a freddo - uso di f_{ya} *)	tutti	c
Sezioni scatolari saldate 	in generale (eccettuato quanto sotto)	tutti	b
	saldature spesse e $b/t_f < 30$ $b/t_w < 30$	y-y z-z	c c
Sezioni ad U, L, T e sezioni piene 		tutti	c

*) Vedere 5.5.1.4(4) e fig. 5.5.2.

Prospetto 5.5.2 - Coefficienti di riduzione

$\bar{\lambda}$	χ per curve di instabilità			
	a \otimes	b \otimes	c \otimes	d \otimes
0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3	0,9775	0,9641	0,9491	0,9235
0,4	0,9528	0,9261	0,8973	0,8504
0,5	0,9243	0,8842	0,8430	0,7793
0,6	0,8900	0,8371	0,7854	0,7100
0,7	0,8477	0,7837	0,7247	0,6431
0,8	0,7957	0,7245	0,6622	0,5797
0,9	0,7339	0,6612	0,5998	0,5208
1,0	0,6656 0,674	0,5970 0,589	0,5399 0,537	0,4671 0,468
1,1	0,5960	0,5352	0,4842	0,4189
1,2	0,5300	0,4781	0,4338	0,3762
1,3	0,4703	0,4269	0,3888	0,3385
1,4	0,4179	0,3817	0,3492	0,3055
1,5	0,3724 0,381	0,3422 0,343	0,3145 0,323	0,2766 0,290
1,6	0,3332	0,3079	0,2842	0,2512
1,7	0,2994	0,2781	0,2577	0,2289
1,8	0,2702	0,2521	0,2345	0,2093
1,9	0,2449	0,2294	0,2141	0,1920
2,0	0,2229 0,228	0,2095 0,205	0,1962 0,200	0,1766 0,188
2,1	0,2036	0,1920	0,1803	0,1630
2,2	0,1867	0,1765	0,1662	0,1508
2,3	0,1717	0,1628	0,1537	0,1399
2,4	0,1585	0,1506	0,1425	0,1302
2,5	0,1467	0,1397	0,1325	0,1214
2,6	0,1362	0,1299	0,1234	0,1134
2,7	0,1267	0,1211	0,1153	0,1062
2,8	0,1182	0,1132	0,1079	0,0997
2,9	0,1105	0,1060	0,1012	0,0937
3,0	0,1036	0,0994	0,0951	0,0882

\otimes Valori σ_c/f_y secondo CNR 10011/85

In alternativa si può verificare l'asta con la teoria del secondo ordine considerando l'appropriata imperfezione di freccia iniziale (Fig. 5.5.1).

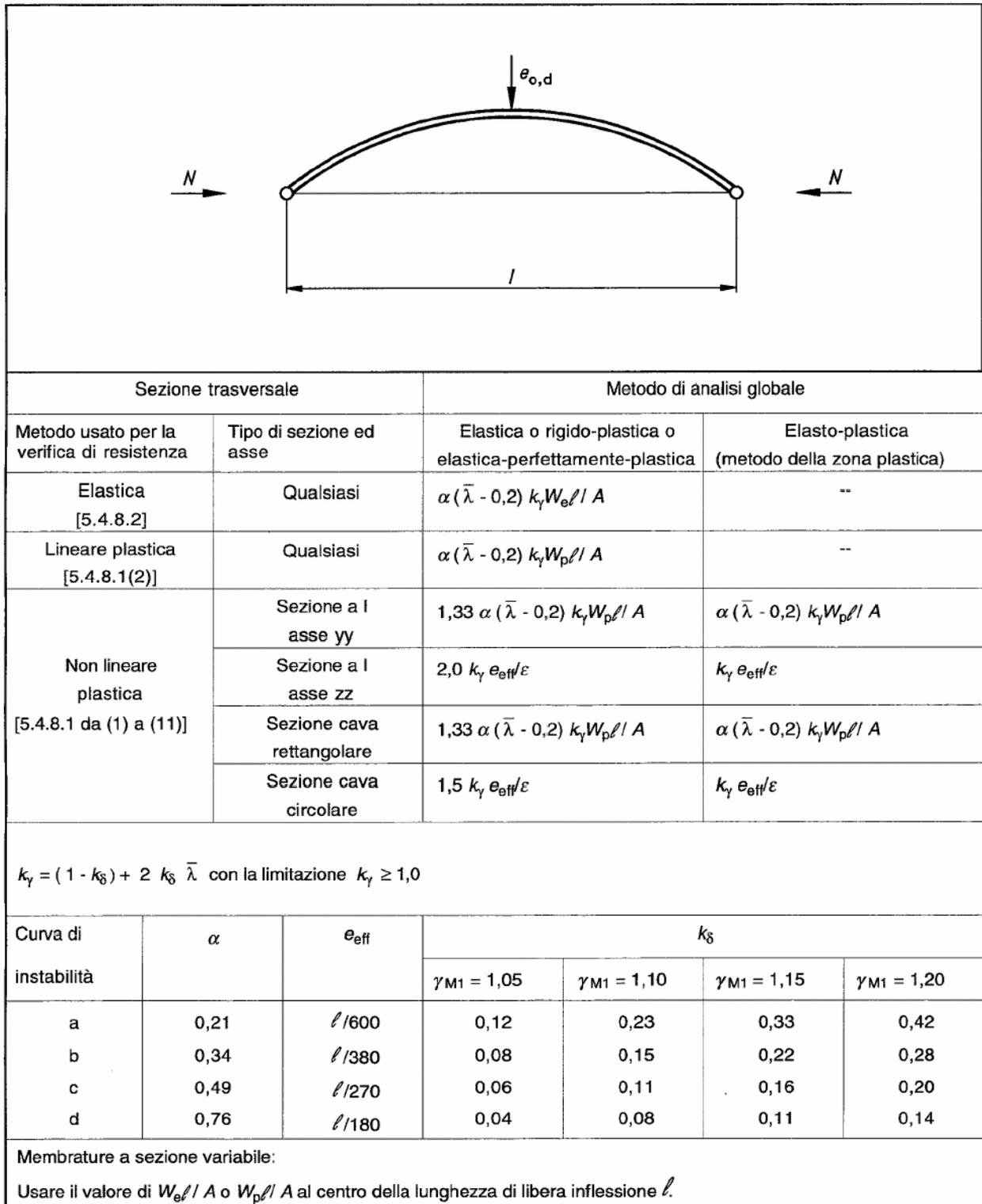
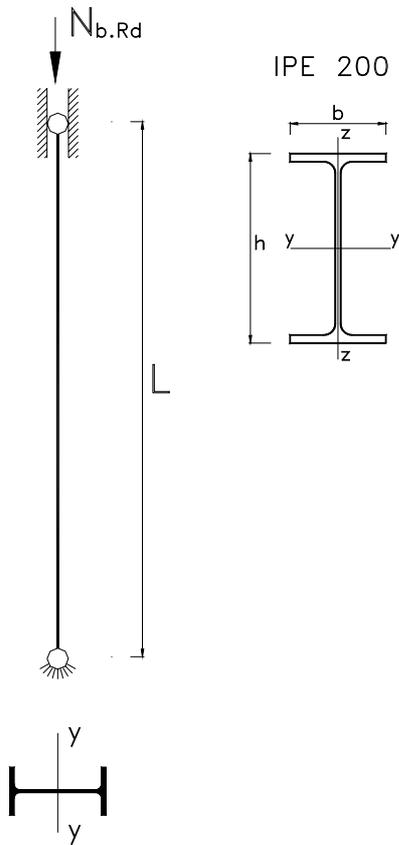


Fig. 5.5.1 - Valori di progetto delle imperfezioni di freccia iniziali equivalenti $e_{o,d}$

ESEMPIO 1 [EC3 #5.5.1]:



Determinare il valore massimo del carico di progetto per l'instabilità nel piano del disegno (inflexione attorno all'asse y-y).

Acciaio Fe360 $f_y=235 \text{ N/mm}^2$

IPE 200 $A=2850 \text{ mm}^2$

$W_{el}=1.94 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$ $i_y=82.6 \text{ mm}$

$b=100 \text{ mm}$ $h=200 \text{ mm}$ $t_f=8.5 \text{ mm} < 40 \text{ mm}$

$h/b > 1.2 \Rightarrow$ curva d'instabilità a) [EC3 prospetto 5.5.3]

$L=7756 \text{ mm}$

$$\lambda = \frac{L}{i_y} = 93.9$$

$$\lambda_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93.9 \cdot \varepsilon = 93.9$$

$$\text{con } \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = 1$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = 1$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 405.26 \text{ kN} \quad [5.45] \text{ per sezioni di classe 1,2 e3}$$

Essendo $\chi = \frac{1}{\phi + [\phi^2 - \bar{\lambda}^2]^{0.5}} = 0.6656$ [5.46]

$$\phi = 0.5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2] = 1.084$$

$$\alpha=0.21$$

coeff. di imperfezione [prospetto 5.5.1]

$$\gamma_{M1}=1.10$$

coeff. di sicurezza per l'instabilità

Calcolo con l'analisi del 2° ordine [EC3 Fig. 5.5.1]

L'analisi del secondo ordine di una membratura deve considerare l'appropriata imperfezione di freccia iniziale equivalente fornita dalla figura 5.5.1 in corrispondenza della pertinente curva d'instabilità, dipendente dal metodo di analisi e dal tipo di verifica della sezione trasversale.

Usiamo il metodo di verifica elastica (W_{el}) e l'analisi globale elastica.

Il valore di progetto dell'imperfezione di freccia iniziale equivalente risulta:

$$e_{0,d} = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) \cdot k_\gamma \cdot W_{el} / A = 14.07 \text{ mm}$$

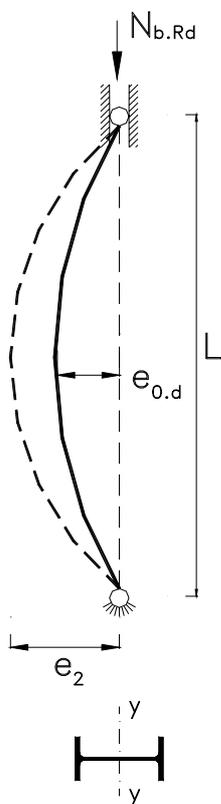
dove: $\alpha=0.21$ curva d'instabilità a)

$$k_\gamma = (1 - k_\delta) + 2 \cdot k_\delta \cdot \bar{\lambda} = 1.23 \geq 1$$

$$k_\delta = 0.23 \quad \text{per } \gamma_{M1} = 1.10$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = 1$$

E' utile ricordare che $e_{0,d} \cdot A / W_{el}$ è il parametro di imperfezione η indicato ad esempio da Young (v. Ballio pag.461).



Il carico $N_{b,Rd}$ incrementa la freccia iniziale $e_{0,d}$ che diviene e_2 . Possiamo calcolare e_2 con la formula approssimata:

$$e_2 = \frac{e_{0,d}}{1 - \frac{N_{b,Rd}}{N_E}} \quad \text{con } N_{b,Rd}=405.26 \text{ kN}$$

$$N_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210000 \cdot 2850}{93.9^2} = 669.9 \text{ kN}$$

$$e_2 = \frac{14.07}{0.3951} = 35.61 \text{ mm}$$

La sezione di mezzeria va verificata a pressoflessione

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_2}{W_{el}} = 405.26 \cdot \left(\frac{1}{2850} + \frac{35.61}{194000} \right) = 142.2 + 74.4 = 217 \text{ N/mm}^2 \cong f_y / \gamma_{M1} = 214$$

Programma Profili

Doppio T - F1 per aiuto

File Tipo Profilo Collegamenti Giunto Flangiato AcciaioCls ?

IPE IPN HEAA HL
 HEA IPEA HEX UB
 HEB IPEO HD UC
 HEM IPEX HP W

Ordina per: Wy ly g

Acciaio: S235 (Fe360) fy (N/mm2): 235

Lunghezze di libera inflessione [m]:
 l_{0y} 7,756 l_{0z} 0

N_{sd} [kN] 0

Aggiorna Tabella

designation	g (Kg/m)	h (mm)	b (mm)	A (cm2)	ly (cm4)	Wy (cm3)	Wpl
IPE 100	8,1	100	55	10,32	171,00	34,20	
IPE 120	10,4	120	64	13,21	317,80	52,96	
IPE 140	12,9	140	73	16,43	541,20	77,32	
IPE 160	15,8	160	82	20,09	869,30	108,70	1
IPE 180	18,8	180	91	23,95	1.317,00	146,30	1
IPE 200	22,4	200	100	28,48	1.943,00	194,30	2

Plotta

IPe 200

$N_{by,Rd}$ [kN] 405, $M_{cy,Rd}$ [kNm] 47,13
 $N_{bz,Rd}$ [kN] 608,4 $M_{cz,Rd}$ [kNm] 9,53
 $V_{ply,Rd}$ [kN] 172,6 $V_{plz,Rd}$ [kNm] 209,7

g (Kg/m): 22,4 h (mm): 200 r2 (mm): 0

b (mm): 100 A (cm2): 28,48 iy (cm): 8,26 iz (cm): 2,24
 tw (mm): 5,6 ly (cm4): 1.943 lz (cm4): 142,4 It (cm4): 6,98
 tf (mm): 8,5 Wy (cm3): 194,3 Wz (cm3): 28,47 lw (cm6): 12.990
 r1 (mm): 12 Wpl,y (cm3): 220,6 Wpl,z (cm3): 44,61

Classe Sezione

Compressione 1
 Flessione My 1 ?
 Flessione Mz 1
 Presso-Flessione 1

Verifiche

Resistenza all'instabilità - EC3 #5.5.1.2.

IPe 200 Acciaio S235 (Fe360) fy (N/mm2) 235

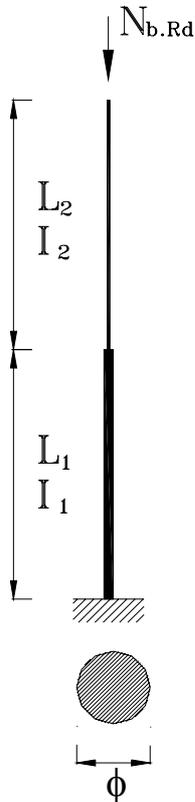
$\gamma_{M1} = 1.1$ $\beta_A = 1.0$ $\epsilon = 1.0$ $\lambda_1 = 93.9$ $\epsilon = 93.9$

Instabilità attorno all'asse

	y - y	z - z
Snellezza λ	93,9	0,0
Snellezza adimensionale $\bar{\lambda} = \lambda / \lambda_1 \beta_A^{0.5}$	1,0	0,0
Curva di instabilità a		b
Coefficiente di imperfezione α	0,21	0,34
$\phi = [1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2]$	1,084	0,466
$\chi = 1 / [\phi + (\phi^2 - \bar{\lambda}^2)^{0.5}]$	0,6656	1,0
$N_{b,Rd} = \chi \beta_A A f_y / \gamma_{M1}$ (kN)	404,98	608,44
Imperfezione di freccia $e_{0,d}$ (mm)	14,1	0,0
N_{cr} (kN)	669,49	∞

ESEMPIO 2: asta a sezione variabile [EC3 #5.5.1.3]

Le membrature a sezione variabile possono essere analizzate usando l'analisi del secondo ordine.



$$\phi_1=40 \text{ mm} \quad A_1=1257 \text{ mm}^2 \quad I_1 = \frac{\pi \cdot \phi_1^4}{64} = 125663 \text{ mm}^4 \quad i_1=10 \text{ mm}$$

$$\phi_2=33.64 \text{ mm} \quad A_2=888 \text{ mm}^2 \quad I_2 = \frac{\pi \cdot \phi_2^4}{64} = 62832 \text{ mm}^4 = I_1 / 2 \quad i_2=8.41 \text{ mm}$$

$$L_1=L_2=572 \text{ mm}$$

Le lunghezze di libera inflessione delle due aste (vedi “Teoria e tecnica delle costruzioni - Instabilità dei telai”, M. Caironi, Clup, Milano, esempio 4 pag. 62) e le rispettivi snellezze sono:

$$L_{01} = \beta_1 \cdot L_1 = 4.37 \cdot 572 = 2500 \text{ mm} \quad \lambda_1 = \frac{L_{01}}{i_1} = 250 \quad \bar{\lambda}_1 = 2.662$$

$$L_{02} = \beta_2 \cdot L_2 = 3.09 \cdot 572 = 1767 \text{ mm} \quad \lambda_2 = \frac{L_{02}}{i_2} = 210 \quad \bar{\lambda}_2 = 2.236$$

Il valore del carico critico euleriano può essere calcolato sia a partire dall'asta inferiore che dall'asta superiore:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{L_{01}^2} = \frac{\pi^2 EI_2}{L_{02}^2} = 41700 \text{ N} \quad \sigma_{cr,1} = 33.2 \quad \sigma_{cr,2} = 47.0 \text{ N/mm}^2$$

Le snellezze adimensionali possono essere calcolate anche dalle tensioni critiche:

$$\bar{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,1}}} = 2.662 \quad \bar{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,2}}} = 2.236$$

A) Resistenza di progetto all'instabilità secondo EC3 #5.5.1.1

La resistenza di progetto all'instabilità può essere calcolata a partire da entrambe le aste, cioè l'asta a sezione variabile può essere considerata equivalente ad un'asta a sezione costante avente la sezione dell'asta inferiore e la snellezza λ_1 , oppure la sezione dell'asta superiore e la snellezza λ_2 . Il metodo viene definito metodo della “**snellezza equivalente**”.

Poiché per le aste reali non vale la formula di Eulero, si avranno due risultati diversi e si dovrà usare il valore più cautelativo. Poiché le snellezze sono elevate (>200) la differenza sarà modesta.

Si deve utilizzare la curva d'instabilità c). Si ottiene:

	$\bar{\lambda}$	χ	$N_{b,Rd}$ [N]
Asta 1	2.662	0.118	31725
Asta 2	2.236	0.161	30484
differenza			4%

La resistenza all'instabilità dell'asta a sezione variabile è quindi:

$$N_{b,Rd} = 30.48 \text{ kN}$$

B) Resistenza di progetto all'instabilità utilizzando l'analisi del secondo ordine [EC3 fig 5.5.1]

Anche l'impiego dell'analisi del secondo ordine richiede la conoscenza della snellezza dell'asta a sezione variabile per determinare il valore di progetto dell'imperfezione di freccia iniziale equivalente $e_{0,d}$. La verifica può essere eseguita facendo riferimento sia all'asta inferiore che all'asta superiore e dà risultati praticamente coincidenti con quelli che si ottengono col metodo precedente.

Appare però più logico calcolare l'imperfezione di freccia iniziale facendo riferimento all'asta inferiore che ha la lunghezza di libera maggiore e nella quale si ha il valore massimo del momento del secondo ordine.

Si impiega un metodo di verifica elastica (W_{el}), l'analisi globale elastica e la curva d'instabilità c).

Il valore di progetto dell'imperfezione di freccia iniziale equivalente è:

$$e_{0,d} = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) \cdot k_\gamma \cdot W_{el} / A = 8.90 \text{ mm}$$

dove: $\alpha=0.49$ $k_\delta = 0.11$ $\bar{\lambda} = 2.662$ $W_{el} / A = 4.999$

$$k_\gamma = (1 - k_\delta) + 2 \cdot k_\delta \cdot \bar{\lambda} = 1.476 \geq 1$$

Il carico $N_{b,Rd} = 30484$ determinato sopra incrementa la freccia iniziale $e_{0,d}$ che diviene e_2 , calcolabile con la formula approssimata:

$$e_2 = \frac{e_{0,d}}{1 - \frac{N_{b,Rd}}{N_{cr}}} = \frac{8.90}{1 - \frac{30484}{41700}} = 33.1 \text{ mm}$$

La verifica a pressoflessione fornisce:

$$\sigma = \frac{N_{b,Rd}}{A} + \frac{N_{b,Rd} \cdot e_2}{W_{el}} = \frac{30484}{1257} + \frac{30484 \cdot 33.1}{6283} = 24.25 + 160.6 = 184.8 < \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 213.6 \text{ N/mm}^2$$

La verifica è ampiamente soddisfatta. Il carico può crescere fino al valore ottenuto con il metodo precedente per l'asta 1 ($N=31725$). I due metodi sono quindi equivalenti.

Si deve però osservare che applicando la teoria del secondo ordine si possono risolvere anche casi nei quali è difficile considerare una snellezza equivalente.

Ad esempio, nel caso di asta con sezione variabile con continuità, l'asta può essere verificata con la teoria del secondo ordine adottando un'imperfezione di freccia iniziale $e_{0,d}$ ragionevolmente a favore di stabilità.

FLESSIONE E COMPRESSIONE ASSIALE

Formula approssimata

Indicando con $\theta = N/N_{cr}$ il rapporto tra l'azione assiale di compressione ed il carico critico euleriano e con $y_1(x)$ il valore della deformazione trasversale calcolata con la teoria del primo ordine, vale con buona approssimazione la seguente espressione per la deformata del secondo ordine:

$$\boxed{y_2(x) = \frac{y_1(x)}{1-\theta} = \frac{y_1(x)}{1-N/N_{cr}}} \quad (1)$$

Pertanto il valore del momento flettente del secondo ordine (M_2) può ricavarsi da quello del primo ordine (M_1) adottando la seguente espressione:

$$M_2 = M_1 + N y_2 = M_1 + N \frac{y_1}{1-\theta} \quad \text{da cui :}$$

$$M_2 = \frac{M_1}{1-\theta} \left[1 + \left(\frac{N_{cr} y_1}{M_1} - 1 \right) \theta \right] \quad \text{ponendo : } \left(\frac{N_{cr} y_1}{M_1} - 1 \right) = \psi \quad \text{si ha infine :}$$

$$\boxed{M_2 = \frac{M_1(1+\psi\theta)}{1-\theta} = \frac{M_{eq}}{1-\theta}} \quad (2)$$

L'approssimazione della (1) è molto migliore di quella della (2), che comunque viene largamente impiegata per la sua semplicità e perché evidenzia la condizione di instabilità facendo tendere M all'infinito per $N=N_{cr}$.

Si noti che le formule sono applicabili anche per N di trazione (valore negativo). In tal caso la freccia diminuisce.

NORMATIVA ITALIANA

La normativa italiana (CNR 10011) adotta per il metodo delle tensioni ammissibili la formula di interazione:

$$\omega \frac{N}{A} + \frac{M_{eq}}{W \left(1 - \nu \frac{N}{N_{cr}} \right)} \leq \sigma_{adm}$$

nella quale:

ν è il coefficiente di sicurezza (1.5)

M_{eq} è il momento equivalente da calcolare nel modo seguente:

$M_{eq} = M$ per momento costante

$M_{eq} = 1.3 M_m$ con la limitazione $0.75 M_{max} < M_{eq} < M_{max}$ essendo M_m il momento medio lungo l'asta e M_{max} il momento massimo.

Nel caso di asta soggetta ai soli momenti di estremità (fig. 1) si assume

$M_{eq} = 0.6 M_a - 0.4 M_b > 0.4 M_a$ con $|M_a| > |M_b|$

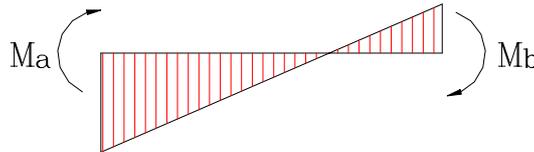


Fig 1

Dividiamo ambo i membri per σ_{adm} :

$$\frac{N}{\sigma_{adm} A} + \frac{M_{eq}}{\sigma_{adm} W \left(1 - \nu \frac{N}{N_{cr}} \right)} \leq 1$$

Moltiplichiamo e dividiamo per il coefficiente di sicurezza ν :

$$\frac{\nu N}{\nu \sigma_{adm} A} + \frac{\nu M_{eq}}{\nu \sigma_{adm} W \left(1 - \nu \frac{N}{N_{cr}} \right)} \leq 1$$

Usando i simboli dell'eurocodice si può scrivere:

$$\frac{N_{Sd}}{N_{b,Rd}} + \frac{1 - N_{Sd} / N_{cr}}{M_{c,Rd}} = \frac{N_{Sd}}{N_{b,Rd}} + \frac{M_{eq,Sd}^{2.ord.}}{M_{c,Rd}} \leq 1$$

Con il simbolo $M_{eq,Sd}^{2.ord.}$ si è indicato il momento equivalente del secondo ordine.

EUROCODICE [EC3 #5.5.4]

L'Eurocodice introduce la seguente formula, valida per sezioni trasversali di classe 1 e 2, per verificare una membratura soggetta all'azione combinata di momento flettente e azione assiale:

$$\frac{N_{sd}}{N_{b.Rd}} + k \frac{M_{sd}}{M_{c.Rd}} \leq 1 \quad [5.51]$$

in cui
$$N_{b.Rd} = \frac{\chi_{\min} \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}}$$

$$M_{c.Rd} = \frac{W_{pl} \cdot f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$k = 1 - \frac{\mu \cdot N_{sd}}{\gamma_{M1} \cdot N_{b.Rd}} \quad \text{con la limitazione } k \leq 1,5$$

Il coefficiente k , oltre ad essere un termine di amplificazione del momento del primo ordine M_{sd} come $1/(1-N/N_{cr})$ per la normativa italiana, congloba anche la trasformazione dal valore del momento esterno M_{sd} (variabile lungo l'asta) al valore del momento equivalente M_{eq} .

Si può osservare che a favore di sicurezza si può adottare sempre $k=1.5$. A prima vista sembra che k sia <1 e che diminuisca all'aumentare di N . Si capisce poi che μ è <0 . Infatti:

$$\mu = \bar{\lambda}(2\beta_M - 4) + \left[\frac{W_{pl} - W_{el}}{W_{el}} \right] \quad \text{con la limitazione } \mu \leq 0,9 \text{ e con } \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1}$$

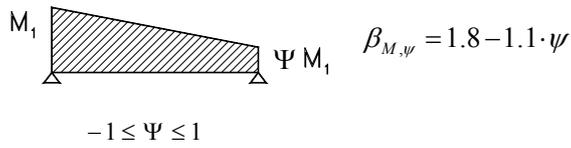
Supponiamo, per semplicità e a favore di sicurezza, di fare la verifica con W_{el} e quindi di considerare $W_{pl}=W_{el}$. Si ha in tal caso:

$$\mu = \bar{\lambda}(2\beta_M - 4)$$

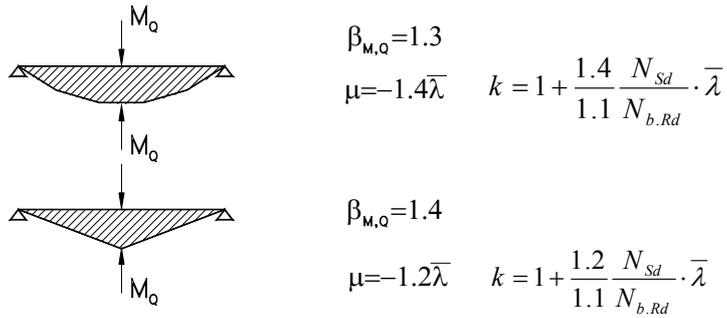
dove: β_M coeff. di momento equivalente uniforme per l'instabilità flessionale [EC3 fig 5.5.3],
dipende dalla distribuzione del momento lungo l'asta.

EC3 Fig. 5.5.3: Coefficienti di momento equivalente uniforme

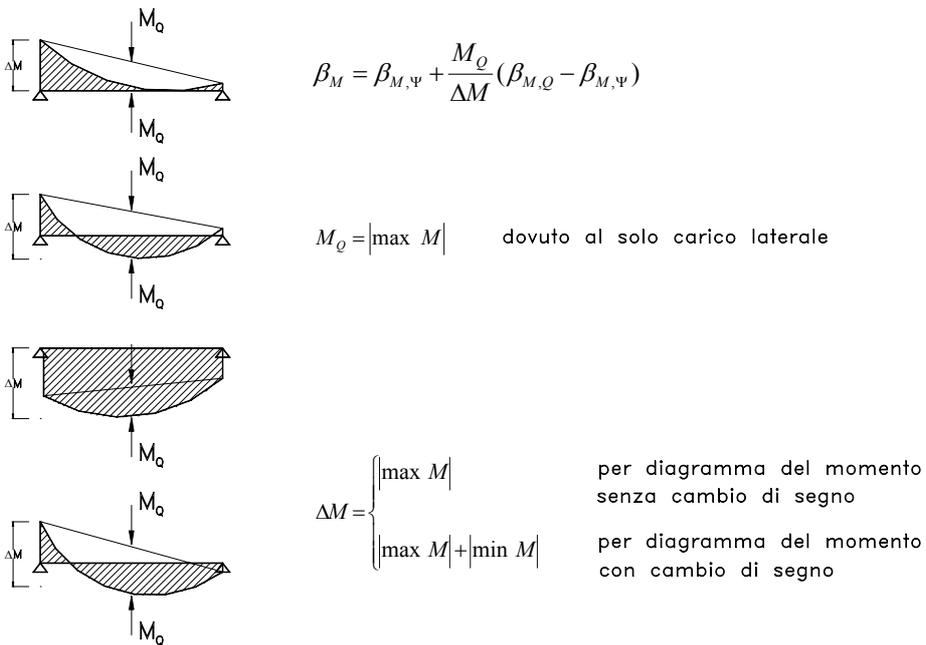
Momenti d'estremità



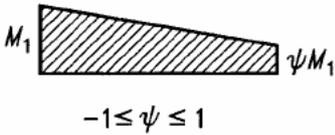
Momenti dovuti a carichi laterali nel piano

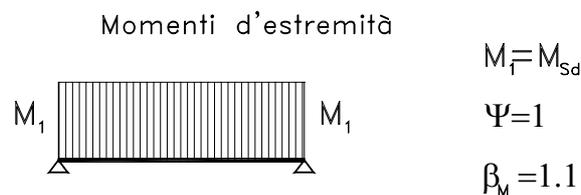


Momenti dovuti a carichi laterali nel piano più momenti d'estremità



Momento costante:

Diagramma del momento	Coefficiente di momento equivalente uniforme β_M
<p>Momenti all'estremità</p>  <p>$-1 \leq \psi \leq 1$</p>	$\beta_{M,\psi} = 1,8 - 0,7 \psi$



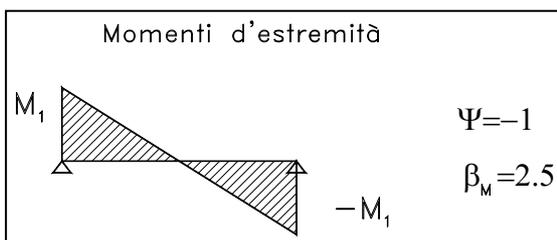
$$\Psi = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta_{M,\Psi} = 1.8 - 0.7 \cdot \Psi = 1.1$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \bar{\lambda}(2\beta_M - 4) = -1.8 \cdot \bar{\lambda} < 0.9 \quad O.K.$$

Il valore di μ è negativo e quindi k risulta maggiore dell'unità:

$$k = 1 + \frac{1.8 \cdot N_{Sd}}{1.1 \cdot N_{b,Rd}} \cdot \bar{\lambda} \leq 1.5$$

Momento con diagramma incrociato:



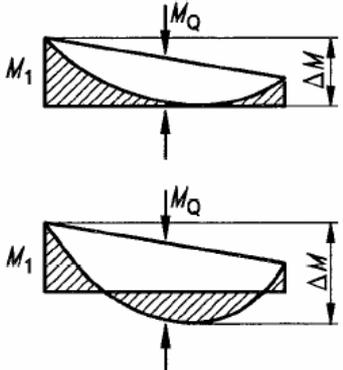
$$\Rightarrow \quad \beta_{M,\Psi} = 1.8 - 0.7 \cdot \Psi = 2.5$$

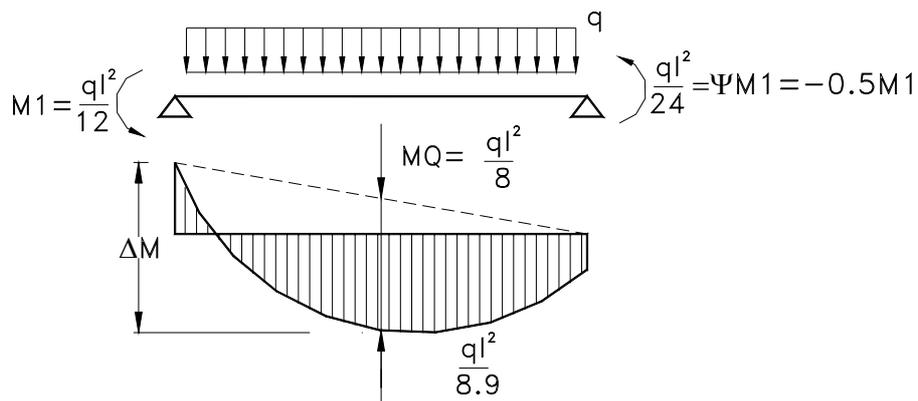
$$\Rightarrow \quad \mu = \bar{\lambda}(2\beta_M - 4) = \bar{\lambda} \quad \text{con} \quad \mu \leq 0.9$$

$$k = 1 - \frac{\mu \cdot N_{Sd}}{\gamma_{M1} \cdot N_{b,Rd}} = 1 - \frac{0.9 \cdot N_{Sd}}{1.1 \cdot N_{b,Rd}} \cdot \bar{\lambda} \leq 1.5$$

In questo caso k diminuisce all'aumentare di N . Si noti però che l'effetto amplificativo del secondo ordine avviene lontano dai vincoli dove il momento è minore.

Momenti d'estremità e carico laterale nel piano

Diagramma del momento	Coefficiente di momento equivalente uniforme β_M
<p>Momenti dovuti a carichi laterali nel piano più momenti d'estremità</p> 	$\beta_M = \beta_{M,\Psi} + \frac{M_Q}{\Delta M} (\beta_{M,Q} - \beta_{M,\Psi})$ $M_Q = \max M \quad \text{dovuto al solo carico laterale}$



$$M_Q = \frac{q \cdot l^2}{8} = |\max M| \text{ dovuto al solo carico laterale}$$

$$\Delta M = \frac{q \cdot l^2}{12} + \frac{q \cdot l^2}{8.9} = \frac{q \cdot l^2}{5.1} \quad \Psi = -0.5$$

$$\beta_{M,\Psi} = 1.8 - 0.7 \cdot \Psi = 2.15 \quad \beta_{M,Q} = 1.3$$

Il coefficiente di momento equivalente uniforme risulta:

$$\beta_M = \beta_{M,\Psi} + \frac{M_Q}{\Delta M} (\beta_{M,Q} - \beta_{M,\Psi}) = 2.15 + \frac{1/8}{1/5.1} (1.3 - 2.15) = 1.61$$

$$\mu = (2\beta_M - 4) \cdot \bar{\lambda} = (2 \cdot 1.61 - 4) \cdot \bar{\lambda} = -0.78 \cdot \bar{\lambda}$$

$$k = 1 - \frac{\mu \cdot N_{Sd}}{\gamma_{M1} \cdot N_{b,Rd}} = 1 + \frac{0.78 \cdot N_{Sd}}{1.1 \cdot N_{b,Rd}} \cdot \bar{\lambda} \leq 1.5$$

Esempio 1



Determinare il valore massimo del momento sollecitante agente in presenza dell'azione assiale $N_{Sd} = N_{b,Rd}/2 = 202.6 \text{ kN}$

Acciaio Fe360 $f_y = 235 \text{ N/mm}^2$
 IPE 200 $A = 2850 \text{ mm}^2$ $W_{el} = 1.94 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$ $W_{pl} = 2.206 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$
 $i_y = 82.6 \text{ mm}$
 $b = 100 \text{ mm}$ $h = 200 \text{ mm}$ $t_f = 8.5 \text{ mm} < 40 \text{ mm} \Rightarrow$ curva d'instabilità a)
 [EC3 prospetto 5.5.3]

$L = 7756 \text{ mm}$

$$\lambda = \frac{L}{i_y} = 93.9 \quad \lambda_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93.9 \cdot \varepsilon = 1$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = 1 \quad \text{con } \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = 1$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 405.26 \text{ kN} \quad \text{con } \chi = 0.6656 \quad (\text{vedi es. precedente})$$

In presenza di flessione deve essere [EC3 5.5.4]:

$$\frac{N_{sd}}{N_{b,Rd}} + k \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} \leq 1 \quad [5.51]$$

con $M_{c,Rd} = \frac{W_{pl} \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 47.128 \text{ kN}$

Il coefficiente di momento equivalente uniforme vale:

$$\beta_{M,\Psi} = 1.8 - 0.7 \cdot \Psi = 1.1 \quad \text{essendo } \Psi = 1$$

Quindi:

$$\mu_y = \bar{\lambda} \cdot (2\beta_M - 4) + \frac{W_{pl} - W_{el}}{W_{el}} = 1 \cdot (2.2 - 4) + \frac{220.6 - 194.3}{194.3} = -1.8 + 0.135 = -1.665 < 0.9$$

$$k_y = 1 - \frac{\mu_y \cdot N_{sd}}{\gamma_{M1} \cdot N_{b,Rd}} = 1 + \frac{1.665}{1.1} \cdot 0.5 = 1.757 \leq 1.5 \Rightarrow k_y = 1.5$$

La [5.51] diviene quindi:

$$\frac{N_{sd}}{N_{b,Rd}} + k \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} = \frac{1}{2} + 1.5 \cdot \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} \leq 1$$

$$M_{Sd} \leq 0.5 \cdot \frac{M_{c.Rd}}{1.5} = 0.333 \cdot M_{c.Rd} = 15.709 \text{ kNm}$$

L'esempio può essere svolto anche con la teoria del secondo ordine calcolando l'imperfezione geometrica equivalente:

$$e_{0,d} = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) \cdot k_\gamma \cdot W_{el} / A = 14.07 \text{ mm} \quad (\text{vedi es. precedente})$$

La freccia del primo ordine provocata da M_{Sd} vale:

$$f_0 = \frac{M_{Sd} \cdot L^2}{8 \cdot EJ} = 28.95 \text{ mm}$$

La freccia totale del primo ordine vale quindi:

$$e_1 = e_{0,d} + f_0 = 43.02 \text{ mm}$$

La freccia del 2° ordine, usando la formula approssimata, vale:

$$e_2 = \frac{e_1}{1 - \frac{N_{Sd}}{N_E}} = 61.67 \text{ mm}$$

$$\text{con: } N_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\lambda^2} = 669.935 \text{ kN} \quad \text{e} \quad N_{Sd} = \frac{N_{b.Rd}}{2} = 202.63 \text{ kN}$$

Il momento del secondo ordine in mezzeria vale:

$$M_2 = M_{Sd} + N_{Sd} \cdot e_2 = 15.709 \cdot 10^6 + 202630 \cdot 61.67 = 28.206 \text{ kNm}$$

La tensione di compressione massima vale:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{Sd}}{A} + \frac{M_2}{W_{el}} = 71.1 + 145.2 = 216.3 \text{ N/mm}^2 \cong \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 213.6$$

Programma Profili

Verifica Presso-Flessione - EC3 #5.5.4.
✕

IPE 200
Acciaio S235 (Fe360)
fy (N/mm²) 235

N_{Sd} [kN] 202,6

		Inflessione attorno all'asse	
		y - y	z - z
ℓ ₀ [m]		7,756	0
Snellezza λ		93,9	0
N _{b,Rd} [kN]		405,	608,4
M _{1,Sd} [kNm]		15,7	0
M _{2,Sd} [kNm]		15,7	0
		1,1	1,1
	β _M	-1,665	0,567
	μ	1,5	0,828
	k	47,13	9,53
M _{c,Rd} [kNm]		15,7	0
M _{Sd} [kNm]			

Momenti all'estremità
 Momenti dovuti ai carichi laterali nel piano
 Momenti dovuti ai carichi laterali nel piano più momenti d'estremità

Resistenza della sezione 0,159 OK ?

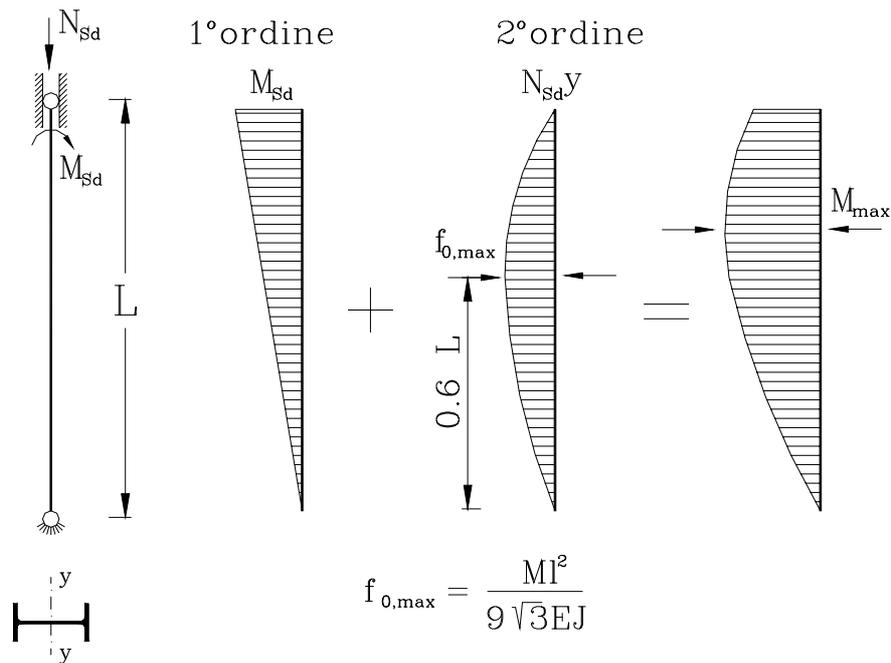
Instabilità flessio-torsionale 0,666 OK ?

Flessione e compressione assiale - Classe 1 - EC3 #5.5.4.(1)

$$\frac{N_{Sd}}{N_{b,Rd,min}} + \frac{k_y M_{y,Sd}}{M_{cy,Rd1}} + \frac{k_z M_{z,Sd}}{M_{cz,Rd1}} = 0,5 + 0,5 + 0 = 1,$$

OK

Esempio 2



Determinare il valore massimo del momento sollecitante posto $N_{sd}=N_{b,Rd}/2$.

Acciaio Fe360 $f_y=235 \text{ N/mm}^2$, IPE 200, $L=7756\text{mm}$

Come nell'esempio precedente risulta:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = 1$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 405.26\text{kN} \quad \text{con} \quad \chi = 0.6656 \quad (\text{vedi es. precedente})$$

In presenza di flessione deve essere [EC3 #5.5.4]:

$$\frac{N_{sd}}{N_{b,Rd}} + k \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} \leq 1 \quad [5.51]$$

$$\text{con:} \quad M_{c,Rd} = \frac{W_{pl} \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 47.128 \text{ kN}$$

Il coefficiente di momento uniforme equivalente vale:

$$\beta_{M,\Psi} = 1.8 - 0.7 \cdot \Psi = 1.8 \quad \text{essendo} \quad \Psi=0$$

Quindi:

$$\mu_y = \bar{\lambda} \cdot (2\beta_M - 4) + \frac{W_{pl} - W_{el}}{W_{el}} = (2 \cdot 1.8 - 4) + \frac{220.6 - 194.3}{194.3} = -0.2646 < 0.9$$

$$k_y = 1 - \frac{\mu_y \cdot N_{sd}}{\gamma_{M1} \cdot N_{b,Rd}} = 1 + \frac{0.2646}{1.1} \cdot 0.5 = 1.1203 \leq 1.5 \quad \Rightarrow \quad k_y = 1.12$$

La [5.51] diviene quindi:

$$\frac{N_{sd}}{N_{b,Rd}} + k \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} = \frac{1}{2} + 1.12 \cdot \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} \leq 1$$

$$M_{Sd} \leq 0.5 \cdot \frac{M_{c,Rd}}{1.12} = 0.4463 \cdot M_{c,Rd} = 21.033 \text{ kNm}$$

Calcolo con la teoria del 2°ordine

imperfezione geometrica equivalente:

$$e_{0,d} = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) \cdot k_\gamma \cdot W_{el} / A = 14.07 \text{ mm} \quad (\text{vedi es. precedente})$$

freccia del primo ordine provocata da M_{Sd} :

$$f_0 = \frac{M_{Sd} \cdot L^2}{9 \cdot \sqrt{3} \cdot EJ} = 19.89 \text{ mm}$$

In questo esempio non è immediato calcolare il valore massimo del momento del 2°ordine perché, a differenza dell'esempio precedente, il momento massimo del primo ordine e la freccia massima non si verificano nella stessa sezione. Il momento massimo del 2° ordine si può avere in un punto qualsiasi dell'asta compreso tra l'estremità superiore e la sezione in cui si ha la freccia massima del primo ordine (questa sezione dista $\cong 0.6 \cdot L$ dall'estremo inferiore).

Il valore del momento del 2° ordine può essere calcolato utilizzando l'espressione approssimata:

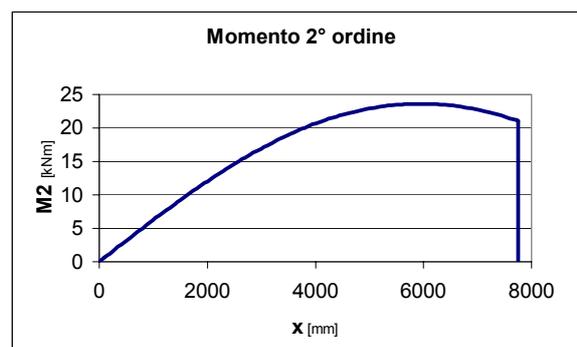
$$M^2(x) = M^1(x) + N \cdot y^2(x) = \frac{M}{L}x + N \cdot \frac{[y^1(x) + e_{0d}(x)]}{\left(1 - \frac{N}{N_E}\right)}$$

essendo:

$y^1(x)$ la freccia elastica del primo ordine

$e_{0d}(x) = e_{0d} \cdot \text{sen}\left(\pi \cdot \frac{x}{L}\right)$ imperfezione geometrica (pari a e_{0d} in mezzzeria)

In questo esempio il valore massimo del momento del secondo ordine M^2 si ha a 5900 mm dall'estremo inferiore ed è pari a 23.62 kNm (vedi diagramma).



La verifica della sezione fornisce quindi:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{Sd}}{A} + \frac{M_2}{W_{el}} = 71.1 + 122 = 193 \text{ N/mm}^2 \cong \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 213.6$$

valore prossimo alla resistenza.

Programma Profili

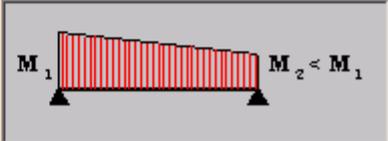
Verifica Presso-Flessione - EC3 #5.5.4.

IPE 200 Acciaio S235 (Fe360) f_y (N/mm²) 235

N_{Sd} [kN] 202,5

	Inflessione attorno all'asse	
	y - y	z - z
ℓ_0 [m]	7,756	0
Snellezza λ	93,9	0
$N_{b,Rd}$ [kN]	405,	608,4
$M_{1,Sd}$ [kNm]	21,03	0
$M_{2,Sd}$ [kNm]	0	0
β_M	1,8	1,1
μ	-0,265	0,567
k	1,12	0,828
$M_{c,Rd}$ [kNm]	47,13	9,53
M_{Sd} [kNm]	21,03	0

Momenti all'estremità
 Momenti dovuti ai carichi laterali nel piano
 Momenti dovuti ai carichi laterali nel piano più momenti d'estremità

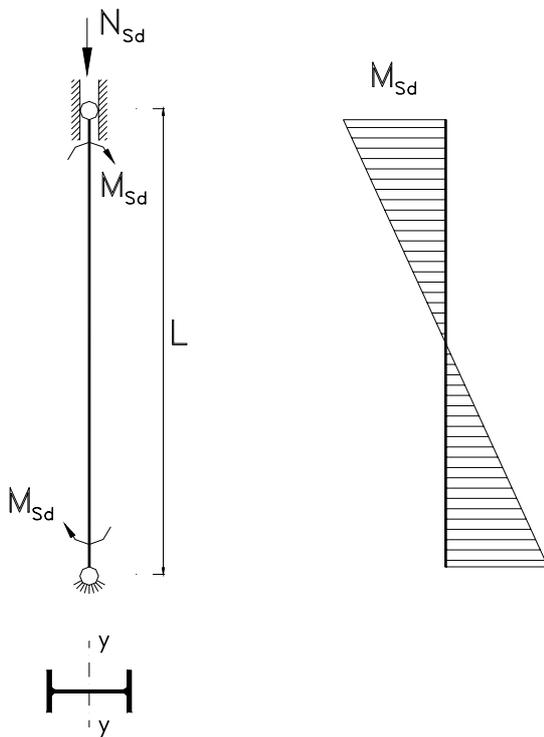


Resistenza della sezione **0,285** OK ?
 Instabilità flessio-torsionale **0,779** OK ?

Flessione e compressione assiale - Classe 1 - EC3 #5.5.4.(1)

$$\frac{N_{Sd}}{N_{b,Rd,min}} + \frac{k_y M_{y,Sd}}{M_{cy,Rd1}} + \frac{k_z M_{z,Sd}}{M_{cz,Rd1}} = 0,5 + 0,5 + 0 = 1, \quad \text{OK}$$

Esempio 3



Determinare il valore massimo del momento sollecitante in presenza dell'azione assiale:

$$N_{Sd} = N_{b.Rd} / 2$$

Acciaio Fe360 $f_y = 235 \text{ N/mm}^2$

IPE 200

$L = 7756 \text{ mm}$

Il coefficiente di momento equivalente uniforme vale:

$$\beta_{M,\Psi} = 1.8 - 0.7 \cdot \Psi = 2.5 \quad \text{essendo } \Psi = -1$$

Si ha quindi:

$$\mu_y = \bar{\lambda} \cdot (2\beta_M - 4) + \frac{W_{pl} - W_{el}}{W_{el}} = (2 \cdot 2.5 - 4) + \frac{220.6 - 194.3}{194.3} = 1.13 < 0.9 \Rightarrow \mu_y = 0.9$$

$$k_y = 1 - \frac{\mu_y \cdot N_{Sd}}{\gamma_{M1} \cdot N_{b.Rd}} = 1 - \frac{0.9}{1.1} \cdot 0.5 = 0.591 \leq 1.5$$

La [5.51] diviene:

$$\frac{N_{sd}}{N_{b.Rd}} + k \frac{M_{sd}}{M_{c.Rd}} = \frac{1}{2} + 0.591 \cdot \frac{M_{sd}}{M_{c.Rd}} \leq 1$$

$$M_{Sd} \leq 0.5 \cdot \frac{M_{c.Rd}}{0.591} = 0.846 \cdot M_{c.Rd} = 39.87 \cdot \text{kNm}$$

Programma Profili

Verifica Presso-Flessione - EC3 #5.5.4.
X

IPE 200
Acciaio S235 (Fe360)
fy (N/mm2) 235

N_{Sd} [kN] 202,5

Momenti all'estremità
 Momenti dovuti ai carichi laterali nel piano
 Momenti dovuti ai carichi laterali nel piano più momenti d'estremità

	Inflessione attorno all'asse	
	y - y	z - z
ℓ ₀ [m]	7,756	0
Snellezza λ	93,9	0
N _{b,Rd} [kN]	405,	608,4
M _{1,Sd} [kNm]	39,87	0
M _{2,Sd} [kNm]	-39,87	0
β _M	2,5	1,1
μ	0,9	0,567
k	0,591	0,828
M _{c,Rd} [kNm]	47,13	9,53
M _{Sd} [kNm]	39,87	0

Resistenza della sezione
1,025
NO
?

Instabilità flessio-torsionale
1,179
NO
?

Flessione e compressione assiale - Classe 1 - EC3 #5.5.4.(1)

$$\frac{N_{Sd}}{N_{b,Rd,min}} + \frac{k_y M_{y,Sd}}{M_{cy,Rd1}} + \frac{k_z M_{z,Sd}}{M_{cz,Rd1}} = 0,5 + 0,5 + 0 = 1,$$

OK

La verifica a presso-flessione è soddisfatta. Non è però soddisfatta la verifica di resistenza della sezione più sollecitata (vedi form seguente). La verifica all'instabilità flessio-torsionale può essere ignorata se si suppone che l'asta sia controventata con continuità nel piano y-y.

Resistenza della sezione a flessione e forza assiale - EC3 #5.4.8.
_ □ X

IPE 200
Acciaio S235 (Fe360)
fy (N/mm2) 235

N_{Sd} [kN] 202,5
M_{y,Sd} [kNm] 39,87
M_{z,Sd} [kNm] 0,0

Presso-Flessione deviata - EC3 #5.4.8.1. (11) - Sezione di classe 1 e 2

$$\left[\frac{M_{y,Sd}}{M_{Ny,Rd}} \right]^\alpha + \left[\frac{M_{z,Sd}}{M_{Nz,Rd}} \right]^\beta = \left[\frac{39,87}{39,4} \right]^2 + \left[\frac{0}{9,53} \right]^{1,66} = 1,025 + 0 = 1,025$$

NO