Teoria del secondo ordine

Programmi agli elementi finiti

Nei programmi agli elementi finiti le funzioni di stabilità vengono approssimate in funzioni lineari del carico assiale P.

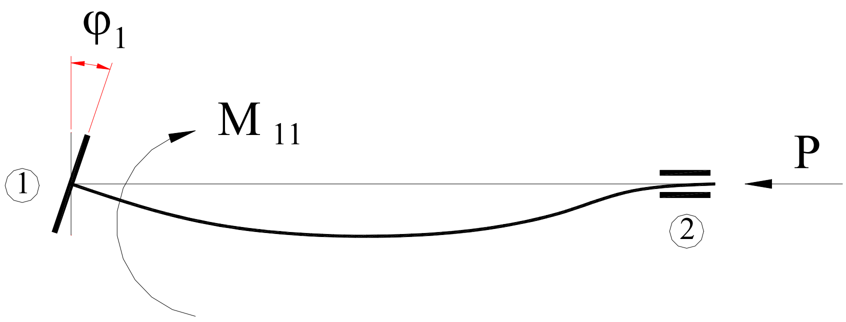

Fig. 1

Ad esempio la rigidezza rotazionale dell'asta incastrata (Fig. 1) viene approssimata nell'espressione:

$$M_{11} = \frac{4EI}{L} - \frac{2}{15}PL = M_{11,E} + M_{11,G}$$

Il primo termine è la rigidezza del primo ordine, detta **rigidezza elastica**. Il secondo termine viene chiamato **rigidezza geometrica** e rappresenta il momento addizionale (negativo) che nasce al nodo per effetto del carico assiale P che agisce sull'asta deformata dalla rotazione impressa $\varphi_1=1$ (deformazione del primo ordine).

Il termine $M_{11,G}$ è il momento iperstatico che ripristina la congruenza violata dalle deformazioni indotte dal momento $M_G(x) = P\,z(x)$.

La z(x) è la deformata del primo ordine provocata dalla distorsione impressa $\varphi_1=1$:

$$z(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} + x$$

Rendiamo isostatica l'asta (Fig. 2) e carichiamola col diagramma delle curvature $q^* = \dfrac{M_G(x)}{EI}$

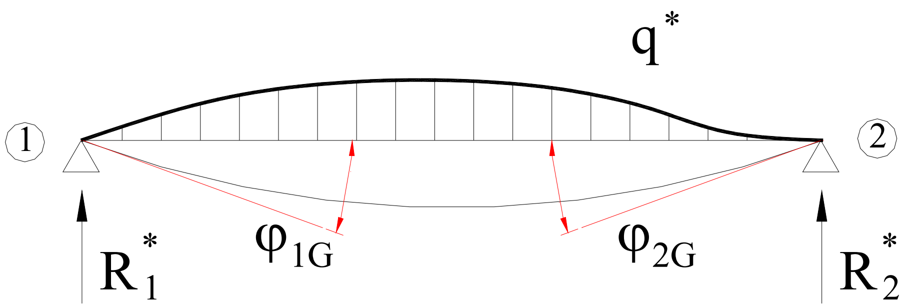

Fig. 2

Con i corollari di Mohr calcoliamo le rotazioni:

$$\varphi_{1G} = R_1^* = \frac{1}{L}\int_0^L q^*(L-x)dx = \frac{PL^2}{20EI}$$

$$\varphi_{2G} = R_2^* = \frac{1}{L}\int_0^L q^*x\,dx = \frac{PL^2}{30EI}$$

I momenti iperstatici $M_{11,G}$ e $M_{21,G}$ che ripristinano la congruenza si ottengono dal sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{L}{4EI}M_{11G} + \dfrac{L}{2EI}M_{21G} + \varphi_{1G} = 0 & \rightarrow \quad M_{11G} = -\dfrac{2}{15}PL \\ \dfrac{L}{2EI}M_{11G} + \dfrac{L}{4EI}M_{21G} + \varphi_{2G} = 0 & \rightarrow \quad M_{21G} = +\dfrac{1}{30}PL \end{cases}$$

Le espressioni sono approssimate perché abbiamo considerato P agente sulla deformata del primo ordine anziché su quella del secondo ordine.

Esempio

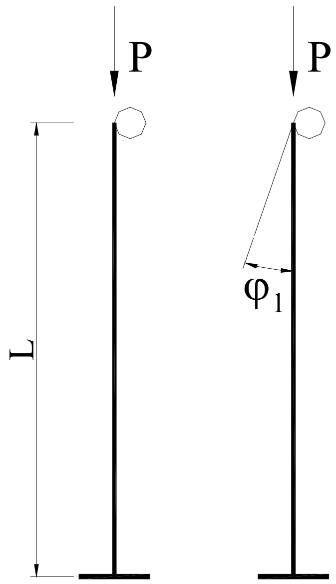

Fig. 3

Risolviamo col metodo degli spostamenti:

$$equazione\ di\ equilibrio: \quad M_{11}\varphi_1 + m_{10} = 0$$

$$m_{10} = 0$$

$$equazione\ di\ stabilità: \quad M_{11} = 0$$

Soluzione esatta:

$$M_{11} = \frac{4EI}{L} A(\alpha L) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha L = 4.4934 \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{\alpha L} = 0.69916$$

Soluzione approssimata agli elementi finiti:

$$M_{11} = \frac{4EI}{L} - \frac{2}{15} PL = 0 \quad \rightarrow \quad 2 - \frac{1}{15}\frac{P}{EI}L^2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$2 - \frac{1}{15}(\alpha L)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad (\alpha L)^2 = 30 \quad \rightarrow \quad \alpha L = 5.4772 \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{\alpha L} = 0.5736$$

La soluzione agli elementi finiti è a **sfavore di sicurezza**. Si deve discretizzare l'asta in più elementi.

In generale, per un sistema ad n gradi di libertà, il sistema delle equazione di equilibrio si scrive:

$$\overline{\overline{K}}\,\overline{X} - \lambda\,\overline{\overline{K}}_G\,\overline{X} = 0$$

Nel caso presente:

$$\overline{\overline{K}} = \frac{4EI}{L}$$

$$\overline{X} = \varphi_1$$

$$\overline{\overline{K}}_G = \frac{2}{15} PL$$

λ = moltiplicatore critico delle azioni assiali (buckling factor)